Universidad de Talca
Campus Curicó

NOTA	

Prueba N° 2

DATOS PERSONALES. USAR LÁPIZ PASTA y LETRA MAYÚSCULA):

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:
Módulo:	Carrera:	Sección:

Instrucciones:
- **NO HAY CONSULTAS**.
- Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Conteste en forma ordenada y justifique adecuadamente cada respuesta.
- Los útiles (lápiz, goma, etc.) son de uso personal.
- Recuerde que debe realizar su prueba en su respectiva sección, de lo contrario será calificado con nota mínima.
- Queda prohibido el uso de calculadoras y formulario.
- Apagar y guardar sus **celulares**.

Nota $= 1 + \dfrac{Puntos}{10}$.

Duración = 60 minutos

CORRECCIÓN

Pregunta 1	
Pregunta 2	
Pregunta 3	
TOTAL PUNTOS	

UTALCA

IMAFI

1) **(15 puntos)** Considerar la función $F(x) = \sin x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt$, demostrar que:

$$F(x) - \tan x F'(x) = -2\frac{\sin^3 x}{x}, \forall x \neq 0$$

Desarrollo:

$$F'(x) = \cos x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt + \sin x \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} \cdot 2 \qquad \text{(7 puntos)}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
&F(x) - \tan x F'(x) \\
&= \sin x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt - \tan x \left(\cos x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{\sin x \sin(2x)}{x} \right) \\
&= \sin x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt - \tan x \left(\cos x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t} dt + \frac{2 \sin^2 x \cos x}{x} \right) \\
&= \sin x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt - \sin x \int_3^{2x} \frac{\sin t}{t}\, dt - 2\frac{\sin^3 x}{x} \\
&= -2\frac{\sin^3 x}{x} \qquad \text{(8 puntos)}
\end{aligned}$$

2) **(30 puntos)** Considerar la región R del plano acotado por:
la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, la recta $3y = x + 5$ y el eje X.

a) Graficar la región R en el plano cartesiano

b) Expresar (**sin calcular**) la(s) integral(es) que representan:

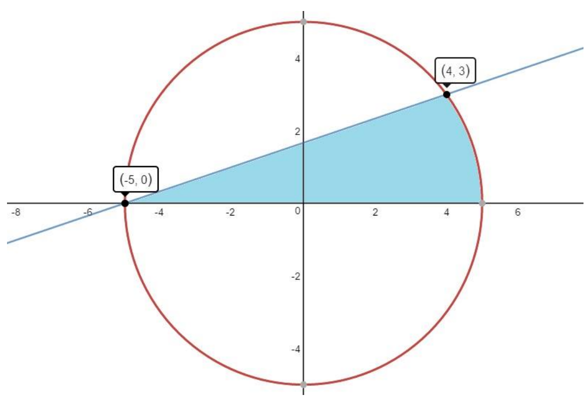
i) El área de la región R

ii) El volumen generado al hacer rotar la región R en torno a la recta $y = 8$

iii) El volumen generado al hacer rotar la región R en torno a la recta $x = 5$

Desarrollo:
Los puntos de intersección vienen dados por la ecuación:
$(3y - 5)^2 + y^2 = 25 \Rightarrow 10y^2 - 30y = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = 3$
Luego, los puntos de intersección son (-5,0) y (4,3). (3 puntos)

a)



(3 puntos)

b) i) **El área pedida viene dada por:**

$$\int_{-5}^{4} \frac{1}{3}(x+5)\, dx + \int_{4}^{5} \sqrt{25 - x^2} dx$$

o también por: $\displaystyle\int_0^3 \left(\sqrt{25 - y^2} - (3y - 5)\right) dy$ (8 puntos)

ii) **El volumen pedido viene dado por:**

$$\pi \int_{-5}^{4} \left(8^2 - (8 - \frac{1}{3}(x+5))^2\right) dx + \pi \int_{4}^{5} \left(8^2 - (8 - \sqrt{25 - x^2})^2\right) dx$$

o también por: $\displaystyle 2\pi \int_0^3 (8 - y)(\sqrt{25 - y^2} - (3y - 5)) dy$ (8 puntos)

iii) **El volumen pedido viene dado por:**

$$2\pi \int_{-5}^{4} (5 - x)\frac{1}{3}(x+5) dx + 2\pi \int_{4}^{5} (5 - x)\sqrt{25 - x^2} dx$$

o también por: $\displaystyle \pi \int_0^3 \left((5 - (3y - 5))^2 - (5 - \sqrt{25 - y^2})^2\right) dy$ (8 puntos)

3) **(15 puntos)** Estudiar la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_{-2}^{1} \frac{3}{2\sqrt{4-x^2}}dx$$

Desarrollo:

$$\int_{-2}^{1} \frac{3}{2\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$= \frac{3}{2}\int_{-2}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$
$$= \lim_{a \longrightarrow -2^+} \frac{3}{2}\int_{a}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \qquad \text{(2 puntos)}$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$$

Tomando $x = 2\sin u$, $dx = 2\cos u du$ se tiene que:

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4-4\sin u^2}} 2\cos u du$$
$$= \int \frac{2\cos u}{2\cos u}du$$
$$= \int \frac{2\cos u}{2\cos u}du$$
$$= \int du$$
$$= u$$
$$= \arcsin(x/2) \qquad \text{(5 puntos)}$$

Luego

$$= \lim_{a \longrightarrow -2^+} \frac{3}{2}\int_{a}^{1} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \lim_{a \longrightarrow -2^+} \frac{3}{2}\left(\arcsin(x/2)\right)\Big|_a^1$$
$$= \frac{3}{2}\lim_{a \longrightarrow -2^+}\left(\arcsin(1/2) - \arcsin(a/2)\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \pi$$

Así, la integral dada es convergente. (8 puntos)